

Equations d'onde des bosons résultant des équations récursives des fermions

C. DAVIAU ^a, J. BERTRAND ^b, D. GIRARDOT, ^c T. SOCROUN, ^d

^a Le Moulin de la Lande, 44522 Pouillé-les-coteaux, France
claude.daviau@nordnet.fr

^b 15 Avenue Danielle Casanova, 95210 St Gratien, France
bertrandjacques-m@orange.fr

^c 95 Rue Marceau, 91120 Palaiseau, France
dominique.girardot2@sfr.fr

^d Paris, France
tsocroun@yahoo.fr

Résumé : Les équations d'onde des fermions (électrons, neutrinos-magnétiques, quarks colorés) peuvent être mises sous forme covariante relativiste et récursive. Les équations du second ordre et d'ordre supérieur obtenues en itérant l'équation du premier ordre contiennent des termes qui sont les champs des bosons de jauge. Ces champs de jauge sont des champs d'opérateurs. Les équations d'onde récursives, donc aussi les équations itérées, sont compatibles avec la gravitation.

ABSTRACT. The wave equations of fermions (electrons, neutrinos-magnetic monopoles, coloured quarks) are both relativistic covariant and recursive. Second-order or third-order wave equations obtained by iterating the first order equations contain terms which are the fields of the gauge bosons. These gauge fields are operator fields. The recursive wave equations, therefore also the iterated equations, are compatible with the gravitation of General Relativity.

keywords : invariance group, Dirac equation, electromagnetism, weak interactions, Clifford algebras, electric charge, quark, standard model, gravitation.

P.A.C.S.: 15A66, 35Q41, 81T13, 83E15

Introduction

Après la découverte en 1924 de l'onde quantique par Louis de Broglie [1], à partir de considérations relativistes et en unifiant les principes de minimum de l'optique et de la mécanique, la physique quantique a pris son essor avec l'obtention de l'équation d'onde de l'électron par Schrödinger. C'est essentiellement sur la base de cette équation d'onde que

s'est construite la théorie, malgré la découverte du spin de l'électron, la même année 1926. L'équation d'onde de Dirac, obtenue en 1928, donc fort peu de temps après, a pourtant l'avantage d'être relativiste, de donner le spin $1/2$ de l'électron, de donner tous les résultats dont on a besoin pour les états des électrons dans les atomes [2].

C'est l'équation de Dirac qui est le point de départ de la théorie du monopôle magnétique de Georges Lochak [3]–[5], ainsi que la théorie de jauge électro-faible de Weinberg-Salam [6]. Mais alors que Lochak a obtenu pour le monopôle magnétique la forme générale du terme de masse à la fois compatible avec la jauge chirale du monopôle et avec l'invariance relativiste de l'onde, la théorie électro-faible utilise un groupe de jauge $U(1) \times SU(2)$ qui est incompatible avec le terme de masse de l'équation linéaire de Dirac, donc la théorie électro-faible est contrainte de supprimer ce terme de masse, et ne peut réintroduire la masse qu'avec le mécanisme de Higgs (rupture spontanée de la symétrie de jauge). Ce processus reste d'ailleurs une rupture de symétrie, ceci signifie que la gravitation reste incompatible avec la symétrie de jauge. Les équations d'onde que nous étudions ici, en dépassant ce blocage, constituent donc un progrès majeur vers l'unification des interactions.

L'équation d'onde de Dirac a été revisitée par D. Hestenes [7] [8] dans le cadre de l'algèbre de Clifford de l'espace-temps de signature $+- - -$, $Cl_{1,3}$, et dans ce cadre il a pu établir que l'équation d'onde relativiste permet d'obtenir la force de Lorentz agissant sur l'électron.

Après avoir étudié en détail l'onde quantique de l'électron, de Broglie a bâti une mécanique ondulatoire du photon [9] [10]. Cette théorie a été complétée par Lochak qui a fait le lien entre le photon magnétique et le graviton à l'approximation linéaire de la gravitation d'Einstein [11] [12] [13]. De Broglie avait été très impressionné par le résultat d'Einstein, faisant de l'équation du mouvement d'une particule la conséquence des équations du champ de gravitation. Dans le domaine quantique, seule l'équation de Dirac donne un résultat semblable, car la force de Lorentz agissant sur l'électron est une conséquence de l'équation de Dirac régissant l'onde. Pour obtenir l'onde quantique du photon, de Broglie utilise deux ondes spinorielles, ou deux fois la même onde. Parmi les buts de cette construction figurait la question du potentiel électromagnétique, qui est extérieur dans la théorie de Dirac, c'est-à-dire créé par toutes les autres charges électriques en dehors de l'électron dont on considère l'équation d'onde. Une séparation entre le potentiel créé par l'objet lui-même de ceux créés par les autres porteurs de charge électrique est im-

possible dans une théorie de champ. Le champ gravitationnel créé par une distribution étendue de masse agit, lui, sur la distribution elle-même.

Nous continuons ici un travail qui est parti de l'utilisation, dans l'équation d'onde de l'électron, du terme de masse obtenu par Lochak pour le monopôle magnétique [14]. La réécriture de la théorie de Dirac utilisant seulement l'algèbre de Pauli [15], isomorphe à l'algèbre de Clifford Cl_3 , a permis d'obtenir les bonnes solutions pour l'électron d'un atome d'hydrogène avec les seules parties droites et gauches de l'onde [16] [17]. Ces ondes gauches et droites ont émergé pour l'étude des électrons à grande vitesse, puis ont été à la base de la théorie électro-faible et de la théorie du monopôle. Donc la décomposition de l'onde de Dirac en grandes et petites composantes que l'on peut négliger est aberrante : il ne viendrait à l'esprit de personne de supprimer le champ magnétique dans les cas où il est petit par rapport au champ électrique, ce qui romprait l'invariance relativiste de l'électromagnétisme. C'est pourtant ce que fait la théorie quantique pour l'électron. De Broglie a, dans un second livre sur l'électron de Dirac, vivement critiqué [18] cette approximation détruisant à la fois le spin et la dynamique de l'électron. La réécriture avec Cl_3 montre clairement combien la théorie de Dirac basée sur les matrices complexes 4×4 est incomplète : elle ignore la plupart des densités tensorielles que permet de former l'onde spinorielle [19] [20] de l'électron.

L'invariance relativiste de l'équation d'onde de l'électron est incluse dans une invariance plus contraignante sous le groupe Cl_3^* qui contient $SL(2, \mathbb{C})$ [21]. Ce groupe d'invariance élargi régit en fait la totalité de l'électromagnétisme, y compris l'onde de l'électron [17] [22] [23] [24].

Ces contraintes supplémentaires ont permis de mieux comprendre comment fonctionnent les interactions faibles et les interactions fortes [25] [26] [27] [28]. L'étude a d'abord été faite dans le cadre d'une algèbre de Clifford avec plus de dimensions d'espace-temps. Ce cadre élargi nous a permis d'obtenir le groupe de jauge $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ du modèle standard de la physique quantique, et pas un autre.

Ces bases nous ont permis d'élargir l'onde de l'électron de spin $1/2$ à une onde dont les différentes parties décrivent les particules et antiparticules de ce que le modèle standard appelle la « première génération ». Nous avons ensuite généralisé le terme de masse de l'équation d'onde de l'électron, d'abord pour les ondes droites et gauches de l'électron et l'onde gauche de son neutrino [29], ensuite pour l'onde générale de première génération [30] [31] [32]. Outre le fait que les équations d'onde obtenues sont invariantes sous le groupe élargi, donc invariantes relativistes, et in-

variantes de jauge sous le groupe de jauge du modèle standard, les équations d'onde comportent un terme de masse. Le mécanisme de symétrie spontanément brisée n'est plus nécessaire pour inclure la gravitation.

Un double lien existe entre les équations d'onde et la densité lagrangienne : les équations d'onde s'obtiennent, dans le cas stationnaire, par les équations de Lagrange à partir de la densité lagrangienne, et, dans le cas général, y compris avec des solutions non stationnaires, la densité lagrangienne s'obtient à partir de la seule partie scalaire réelle (au sens cliffordien du terme) des équations d'onde. Cette double implication entre équations d'onde et densité lagrangienne est à la fois la cause de l'existence en physique d'un principe de minimum, et la limite de ce principe : seule la partie fermionique est nécessairement lagrangienne.

Nous présentons ici une forme récursive des équations d'onde fermionique équivalente à celle que nous avons obtenues précédemment [33]–[39], avec les mêmes propriétés d'invariance relativiste élargie, d'invariance de jauge compatible avec la masse, et récursives. La récursivité implique des équations du second ordre que le modèle standard décrit en termes de « bosons de jauge ». Ce sont ces bosons de jauge que nous étudions maintenant, pour les leptons puis pour les quarks.

1 Equations d'onde récursives des leptons

Les ondes leptoniques comportent, pour la première génération, quatre spineurs, deux ondes gauches et deux ondes droites. L'électron a une onde droite notée R^1 et une onde gauche notée L^1 . Le neutrino électronique, qui est aussi le monopôle magnétique de Lochak, possède également une onde droite notée R^8 et une onde gauche notée L^8 . Le modèle initial de Weinberg-Salam [6] ne comportait que les deux ondes de l'électron et l'onde gauche du neutrino [29]. La raison de ces quatre sortes d'onde est l'existence de quatre représentations non équivalentes du groupe géométrique d'invariance, $Cl_3^* = GL(2, \mathbb{C})$: M étant un élément quelconque de ce groupe, c'est-à-dire un élément quelconque inversible de l'algèbre de Clifford de l'espace physique, la dilatation de Lorentz associée R transforme x en $x' = R(x)$ avec [21] :

$$\begin{aligned} x &= x^\mu \sigma_\mu ; \quad \sigma^0 = \sigma_0 = 1 ; \quad \sigma^j = -\sigma_j, \quad j = 1, 2, 3. \\ x' &= R(x) = x'^\nu \sigma_\nu = Mx\widetilde{M} ; \quad x'^\nu = R_\mu^\nu x^\mu ; \quad \det(M) = re^{i\theta}, \quad (1.1) \\ \nabla &= \sigma^\mu \partial_\mu ; \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} ; \quad \nabla' = \sigma^\mu \partial'_\mu ; \quad \partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} ; \quad \partial_\mu = R_\mu^\nu \partial'_\nu, \end{aligned}$$

$$R^{1'} = MR^1; \quad \widehat{L}^{1'} = \widehat{M}\widehat{L}^1; \quad R^{8'} = R^8 M; \quad \widehat{L}^{8'} = \widehat{L}^8 \widehat{M} \quad (1.2)$$

$$\nabla = \overline{M}\nabla'\widehat{M} \quad (1.3)$$

Dans les égalités précédentes, nous identifions les deux algèbres isomorphes Cl_3 et $M_2(\mathbb{C})$, l'algèbre de Pauli : les trois matrices σ_j de Pauli forment une base orthonormée de sens direct de l'espace physique. La dilatation R est la composée d'une transformation de Lorentz et d'une homothétie de rapport r . Outre la convention usuelle de sommation des indices hauts et bas, dans laquelle les indices grecs vont de 0 à 3 tandis que les indices latins vont de 1 à 3, nous utilisons trois conjugaisons : a et b étant deux nombres réels, $\vec{v} = v^j \sigma_j$ et $\vec{w} = w^j \sigma_j$ étant deux vecteurs, l'élément général de l'algèbre est somme d'un réel, d'un vecteur, d'un pseudo-vecteur et d'un pseudo-scalaire, on pose :

$$\begin{aligned} M &= a + \vec{u} + i\vec{w} + ib; \quad i = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3; \\ \widehat{M} &= a - \vec{u} + i\vec{w} - ib; \\ \widetilde{M} &= a + \vec{u} - i\vec{w} - ib; \quad \overline{M} = a - \vec{u} - i\vec{w} + ib. \end{aligned} \quad (1.4)$$

La conjugaison $M \mapsto \widehat{M}$ est l'automorphisme principal de Cl_3 . La conjugaison $M \mapsto \widetilde{M}$ est la réversion, identique ici au passage à la matrice adjointe. La conjugaison $M \mapsto \overline{M}$ est la composée des deux précédentes. Dans la transformation R décrite en (1.1) à (1.4) l'élément M est quelconque et indépendant de x , il en résulte que R décrit le changement entre coordonnées d'un référentiel d'inertie par rapport à un autre référentiel d'inertie. Il est possible de généraliser ces transformations en considérant, au voisinage du point x , un M variable, tel que, si $M(0) = 1$:

$$\begin{aligned} M &= 1 + \frac{dx^\mu}{2}(p_\mu + f_\mu \sigma_1 + l_\mu \sigma_2 + a_\mu \sigma_3 + h_\mu i \sigma_1 + g_\mu i \sigma_2 + b_\mu i \sigma_3 + ib_\mu), \\ \widetilde{M} &= 1 + \frac{dx^\mu}{2}(p_\mu + f_\mu \sigma_1 + l_\mu \sigma_2 + a_\mu \sigma_3 - h_\mu i \sigma_1 - g_\mu i \sigma_2 - b_\mu i \sigma_3 - ib_\mu). \end{aligned} \quad (1.5)$$

où les p_μ, \dots, b_μ sont des fonctions numériques de x . On a alors :

$$\begin{aligned} M\overline{M} &= \det(M) = 1 + dx^\mu(p_\mu + ib_\mu); \quad \det(M^{-1}) = 1 - dx^\mu(p_\mu + ib_\mu), \\ \overline{M}^{-1} &= M \det(M^{-1}) \\ &= 1 + \frac{dx^\mu}{2}(-p_\mu + f_\mu \sigma_1 + l_\mu \sigma_2 + a_\mu \sigma_3 + h_\mu i \sigma_1 + g_\mu i \sigma_2 + b_\mu i \sigma_3 - ib_\mu). \end{aligned} \quad (1.6)$$

la dilatation R définie à partir de M en (1.1) donne alors :

$$\begin{aligned} x'^0 &= x^0 + (p_\mu x^0 + f_\mu x^1 + l_\mu x^2 + a_\mu x^3) dx^\mu, \\ x'^1 &= x^1 + (f_\mu x^0 + p_\mu x^1 + b_\mu x^2 - g_\mu x^3) dx^\mu, \\ x'^2 &= x^2 + (l_\mu x^0 - b_\mu x^1 + p_\mu x^2 + h_\mu x^3) dx^\mu, \\ x'^3 &= x^3 + (a_\mu x^0 + g_\mu x^1 - h_\mu x^2 + p_\mu x^3) dx^\mu. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Les symboles de Christoffel $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ étant définis comme

$$x'^\alpha = x^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha x^\beta dx^\gamma, \quad (1.8)$$

on a alors

$$\begin{aligned} \Gamma_{0\mu}^0 &= \Gamma_{1\mu}^1 = \Gamma_{2\mu}^2 = \Gamma_{3\mu}^3 = p_\mu ; \\ \Gamma_{0\mu}^1 &= \Gamma_{1\mu}^0 = f_\mu ; \quad \Gamma_{0\mu}^2 = \Gamma_{2\mu}^0 = l_\mu ; \quad \Gamma_{0\mu}^3 = \Gamma_{3\mu}^0 = a_\mu ; \\ \Gamma_{3\mu}^2 &= -\Gamma_{2\mu}^3 = h_\mu ; \quad \Gamma_{1\mu}^3 = -\Gamma_{3\mu}^1 = g_\mu ; \quad \Gamma_{2\mu}^1 = -\Gamma_{1\mu}^2 = b_\mu. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Toutes les fonctions numériques présentes en (1.5) ont donc une signification géométrique, à l'exception des b_μ qui sont les composantes d'un vecteur, celui de la jauge chirale du groupe $U(1)$ du $U(1) \times SU(2)$ de la jauge électro-faible. Les vecteurs se transformant suivant (1.8) sont les vecteurs appelés « contravariants ». Les vecteurs se transformant comme ∇ vérifient :

$$\nabla' = \sigma^\nu \partial'_\nu = \overline{M}^{-1} \sigma^\nu \widehat{M}^{-1} \partial_\nu = \sigma^\nu (\partial_\nu - dx^\mu \Gamma_{\nu\mu}^\rho \partial_\rho). \quad (1.10)$$

On nomme donc vecteurs « covariants » ceux qui se transforment comme :

$$\partial'_\nu = \partial_\nu - dx^\mu \Gamma_{\nu\mu}^\rho \partial_\rho. \quad (1.11)$$

Nous allons utiliser pour les équations d'onde la dérivation \mathbf{D} telle que

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \nabla - (\nabla \widehat{M}^{-1}) \widehat{M} \\ &= \sigma^\mu [\partial_\mu + \frac{1}{2} (p_\mu - f_\mu \sigma_1 - l_\mu \sigma_2 - a_\mu \sigma_3 + h_\mu i \sigma_1 + g_\mu i \sigma_2 + b_\mu i \sigma_3 - i b_\mu)] \end{aligned} \quad (1.12)$$

Nous avons obtenu en [39] les équations d'onde de la partie leptonique de l'onde quantique de spin 1/2 sous la forme :

$$\begin{aligned}
0 &= (-i\widehat{\mathbf{D}} + \frac{3}{2}\widehat{\mathbf{b}} + m\widehat{\mathbf{v}})R^1, \\
0 &= (-i\overline{\mathbf{D}} - k\widehat{\mathbf{b}} + m\widehat{\mathbf{v}})\widetilde{R}^8; \quad k = \frac{\sqrt{3}}{2\alpha} \\
0 &= (-i\mathbf{D} + \frac{3}{2}\mathbf{b} + \mathbf{w}^3 + m\mathbf{v})\widehat{L}^1 - (\mathbf{w}^1 + i\mathbf{w}^2)\overline{L}^8, \\
0 &= (-i\widetilde{\mathbf{D}} + \frac{\mathbf{b}}{2} - \mathbf{w}^3 + m\mathbf{v})\overline{L}^8 - (\mathbf{w}^1 - i\mathbf{w}^2)\widehat{L}^1.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Les constantes g_1, g_2, g_3 correspondant aux différentes parties du groupe de jauge $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ du modèle standard doivent être intégrées au potentiel [40]. On a donc posé :

$$\mathbf{b} = \frac{g_1}{2}B; \quad \mathbf{w}^k = \frac{g_2}{2}W^k, \quad k = 1, 2, 3; \quad m = \frac{m_0}{\hbar c} \tag{1.14}$$

où les B et W^k sont les potentiels présents dans le modèle de Weinberg-Salam, tandis que m_0 est la masse propre de l'électron. Le modèle de Weinberg-Salam utilise une rotation dans le plan (B, W^3) , nous avons montré [37] que l'angle de cette rotation valait 30° , on a donc :

$$g_1 = \frac{2q}{\sqrt{3}}; \quad k\mathbf{b} = \frac{q}{2\alpha}B = \frac{1}{2e}B = \frac{g}{\hbar c}B = QB \tag{1.15}$$

où g est la charge du monopôle magnétique de Lochak. L'onde \widetilde{R}^8 est invariante sous la transformation de jauge :

$$\widetilde{R}^8 \mapsto \widetilde{R}'^8 = e^{i\theta}\widetilde{R}^8; \quad \widehat{B} \mapsto \widehat{B}' = \widehat{B} + \frac{1}{Q}\overline{\mathbf{D}}\theta. \tag{1.16}$$

Il convient de rappeler que, conformément à (1.16), la jauge magnétique est en $\exp(i\theta)$, tout comme pour R^1 et \widetilde{R}^8 et aussi L^1 et \widetilde{L}^8 , donc \widehat{L}^1 et \overline{L}^8 sont multipliés par $\exp(-i\theta)$. Donc le ψ de Dirac est multiplié par $\exp(i\theta\gamma_5)$. De son côté la jauge électrique est en $\exp(i\theta\sigma_3)$, R^1 est multiplié par $\exp(i\theta)$ et L^1 par $\exp(-i\theta)$, \widehat{L}^1 est multiplié par $\exp(i\theta)$, donc le ψ de Dirac est multiplié par $\exp(i\theta)$.

Le vecteur \mathbf{v} vérifie¹ :

$$\mathbf{v} = \frac{J}{\rho}; \quad \rho^2 = J\widehat{J}, \tag{1.17}$$

¹L'égalité $\rho^2 = J\widehat{J}$ est générale. Le contraire a été publié en [36], où (9.1) est faux, avec les excuses de l'auteur de cette bourde.

où J est le vecteur courant dont la composante de temps J^0 est la densité de probabilité de l'onde leptonique :

$$J = R^1 \tilde{R}^1 + L^1 \tilde{L}^1 + \tilde{R}^8 R^8 + \tilde{L}^8 L^8. \quad (1.18)$$

Donc ρ est la pseudo-norme d'espace-temps de J , donc v vérifie :

$$1 = v\hat{v} = \hat{v}v ; \quad v^0 = \sqrt{1 + (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2}. \quad (1.19)$$

Car $v^0 = J^0/\rho > 0$. Ainsi v est un vecteur unitaire. De plus ce résultat, exact en tout point de l'espace-temps, n'est pas simplement un calcul sur les vecteurs d'un espace vectoriel, c'est un calcul d'algèbre de Clifford, il implique que v est inversible, avec

$$\hat{v} = v^{-1}. \quad (1.20)$$

Nous pouvons donc écrire les équations d'onde (1.13) sous la forme équivalente :

$$\begin{aligned} m\hat{v}R^1 &= (i\hat{\mathbf{D}} - \frac{3}{2}\hat{\mathbf{b}})R^1 ; \quad m\hat{v}\tilde{R}^8 = (i\overline{\mathbf{D}} + k\hat{\mathbf{b}})\tilde{R}^8, \\ m\hat{v}\hat{L}^1 &= (i\mathbf{D} - \frac{3}{2}\mathbf{b} - \mathbf{w}^3)\hat{L}^1 + (\mathbf{w}^1 + i\mathbf{w}^2)\overline{L}^8, \\ m\hat{v}\overline{L}^8 &= (i\tilde{\mathbf{D}} - \frac{\mathbf{b}}{2} + \mathbf{w}^3)\overline{L}^8 + (\mathbf{w}^1 - i\mathbf{w}^2)\hat{L}^1. \end{aligned} \quad (1.21)$$

On pose alors :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{D}}_R^1(R^1) &= \frac{v}{m}(i\hat{\mathbf{D}} - \frac{3}{2}\hat{\mathbf{b}})R^1, \\ \overline{\mathbf{D}}_R^8(\tilde{R}^8) &= \frac{v}{m}(i\overline{\mathbf{D}} + k\hat{\mathbf{b}})\tilde{R}^8, \\ \mathbf{D}_L^{18} \begin{pmatrix} \hat{L}^1 \\ \overline{L}^8 \end{pmatrix} &= \frac{\hat{v}}{m} \begin{pmatrix} i\mathbf{D} - \frac{3}{2}\mathbf{b} - \mathbf{w}^3 & \mathbf{w}^1 + i\mathbf{w}^2 \\ \mathbf{w}^1 - i\mathbf{w}^2 & i\tilde{\mathbf{D}} - \frac{\mathbf{b}}{2} + \mathbf{w}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{L}^1 \\ \overline{L}^8 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Les équations d'onde prennent ainsi la forme récursive :

$$\begin{aligned} R^1 &= \hat{\mathbf{D}}_R^1(R^1) = \hat{\mathbf{D}}_R^1[\hat{\mathbf{D}}_R^1(R^1)] = \dots \\ \tilde{R}^8 &= \overline{\mathbf{D}}_R^8(\tilde{R}^8) = \overline{\mathbf{D}}_R^8[\overline{\mathbf{D}}_R^8(\tilde{R}^8)] = \dots \\ \begin{pmatrix} \hat{L}^1 \\ \overline{L}^8 \end{pmatrix} &= \mathbf{D}_L^{18} \begin{pmatrix} \hat{L}^1 \\ \overline{L}^8 \end{pmatrix} = \mathbf{D}_L^{18}[\mathbf{D}_L^{18} \begin{pmatrix} \hat{L}^1 \\ \overline{L}^8 \end{pmatrix}] = \dots \end{aligned} \quad (1.23)$$

L'équation d'onde de l'électron a été formulée tout d'abord sous la forme utilisant les matrices de Dirac ($0 = [\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) + im]\psi$) puis nous avons obtenu la forme invariante des équations d'onde, par exemple pour l'onde droite de l'électron :

$$0 = \overline{R}^1(-i\widehat{\mathbf{D}} + \frac{3}{2}\widehat{\mathbf{b}} + m\widehat{\mathbf{v}})R^1$$

dont la partie réelle donne en repère inertiel la densité lagrangienne. Le passage de l'une à l'autre des deux formes d'équation n'est pas une équivalence logique : comme les spineurs gauches et droits sont isotropes, ils ne sont jamais inversibles. Dans cette double implication, celle qui va de la densité lagrangienne aux équations d'onde est fort mal établie dans le cas général, et ne marche bien en fait que pour les solutions stationnaires. Au contraire le passage de la forme initiale utilisant les matrices de Dirac à la forme récursive est une simple équivalence logique, parce que le vecteur unitaire \mathbf{v} est inversible.

On se place maintenant dans le cas le plus simple d'un repère d'inertie, dans lequel les symboles de Christoffel sont tous nuls. Alors la dérivation covariante de (1.12) se réduit à :

$$\mathbf{D} = \nabla - \frac{i}{2}\mathbf{b}; \quad \widehat{\mathbf{D}} = \widehat{\nabla} + \frac{i}{2}\widehat{\mathbf{b}}; \quad \widetilde{\mathbf{D}} = \nabla + \frac{i}{2}\mathbf{b}; \quad \overline{\mathbf{D}} = \widehat{\nabla} - \frac{i}{2}\widehat{\mathbf{b}}. \quad (1.24)$$

Les équations récursives des leptons s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} R^1 &= \frac{\mathbf{v}}{m}(i\widehat{\nabla} - 2\widehat{\mathbf{b}})R^1, \\ \widetilde{R}^8 &= \frac{\mathbf{v}}{m}[i\widehat{\nabla} + (\frac{1}{2} + k)\widehat{\mathbf{b}}]\widetilde{R}^8, \\ \begin{pmatrix} \widehat{L}^1 \\ \overline{L}^8 \end{pmatrix} &= \frac{\widehat{\mathbf{v}}}{m} \begin{pmatrix} i\widehat{\nabla} - \mathbf{b} - \mathbf{w}^3 & \mathbf{w}^1 + i\mathbf{w}^2 \\ \mathbf{w}^1 - i\mathbf{w}^2 & i\widehat{\nabla} - \mathbf{b} + \mathbf{w}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{L}^1 \\ \overline{L}^8 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Nous avons rappelé précédemment que le modèle de Weinberg-Salam utilise une rotation dans le plan (B, W^3) et nous avons aussi montré [37] que l'angle de cette rotation valait 30° , on a donc :

$$g_1 = \frac{2q}{\sqrt{3}}; \quad g_2 = 2q. \quad (1.26)$$

Nous allons maintenant supposer que cette rotation est complétée par

une homothétie de rapport 2, donc nous supposons que l'on a :

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{3}A^0 - Z^0 ; \quad W^3 = A^0 + \sqrt{3}Z^0, \\ Z^0 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(W^3 - A^0). \end{aligned} \quad (1.27)$$

La forme du potentiel A^0 est déterminée par le fait que la masse propre du photon est nulle, celle des potentiels w^j par le fait que la jauge est un groupe $SU(2)$. On va donc prendre dans les relations précédentes :

$$\begin{aligned} A^0 &= D_R^1 + D_R^8 - D_L^1 - D_L^8 \\ W^3 &= D_R^1 + D_R^8 - D_L^1 + D_L^8. \end{aligned} \quad (1.28)$$

La valeur de A^0 est reprise de (1.12) de [39], les valeurs des W^j sont celles de (1.17) de [39] auxquelles on ajoute $D_R^1 + D_R^8$ qui est invariant dans le groupe de jauge. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Z^0 &= \frac{2}{\sqrt{3}}D_L^8, \\ B &= \sqrt{3}(D_R^1 + D_R^8 - D_L^1 - \frac{5}{3}D_L^8), \\ b &= \frac{g_1}{2}B = \frac{q}{\sqrt{3}}B = q(D_R^1 + D_R^8 - D_L^1 - \frac{5}{3}D_L^8). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Lorsque le neutrino-monopôle est absent ($L^8 = R^8 = 0$) on obtient :

$$\begin{aligned} 2b &= b + w^3 = qA = q(2D_R^1 - 2D_L^1), \\ R^1 &= \frac{v}{m}(i\widehat{\nabla} - q\widehat{A})R^1, \\ \widehat{L}^1 &= \frac{\widehat{v}}{m}(i\nabla - qA)\widehat{L}^1. \end{aligned} \quad (1.30)$$

C'est la forme récursive des équations d'onde de l'électron dans le potentiel électromagnétique A . Il s'agit de l'équation de Dirac avec modification du seul terme de masse, parce que l'équation s'écrit, avec :

$$\phi = R^1 + L^1; \quad R^1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi_1^1 & 0 \\ \xi_2^1 & 0 \end{pmatrix}; \quad L^1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & -\bar{\eta}_2^1 \\ 0 & \bar{\eta}_1^1 \end{pmatrix}, \quad (1.31)$$

sous la forme :

$$0 = \nabla \widehat{\phi} \sigma_{21} + qA \widehat{\phi} + m e^{-i\beta} \phi; \quad \sigma_{21} = \sigma_2 \sigma_1 = -i\sigma_3, \quad (1.32)$$

ce qui nous redonne l'équation de Dirac, lorsque β est nul ou négligeable, l'équation de Dirac s'écrivant en algèbre d'espace (voir [17] chapitre 2) :

$$0 = \nabla \widehat{\phi} \sigma_{21} + qA\widehat{\phi} + m\phi. \quad (1.33)$$

Le passage de l'équation (1.32) au système (1.30) n'est pas du tout évident, car il faut décroiser l'équation de Dirac, dont le terme de masse relie ondes gauches et ondes droites. Tout d'abord l'angle d'Yvon-Takabayasi β est défini par :

$$a_1 = \det(\phi) = \rho e^{i\beta} = 2\eta^\dagger \xi; \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_2^1 \end{pmatrix}; \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1^1 \\ \eta_2^1 \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

En séparant les colonnes de gauche et les colonnes de droite de chaque matrice présente en (1.32) et en se servant de la conjugaison $R^1 \mapsto \widehat{R}^1$ on peut voir que cette équation est équivalente au système :

$$\begin{aligned} i\widehat{\nabla}R^1 &= q\widehat{A}R^1 + m\frac{a_1}{\rho}\widehat{L}^1, \\ i\nabla\widehat{L}^1 &= qA\widehat{L}^1 + m\frac{\widetilde{a}_1}{\rho}R^1. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Or on a dans le cas de l'électron seul :

$$\begin{aligned} a_1 &= R^1\overline{L}^1 + L^1\overline{R}^1; \quad \widetilde{a}_1 = \widehat{R}^1\widetilde{L}^1 + \widehat{L}^1\widetilde{R}^1, \\ J &= R^1\widetilde{R}^1 + L^1\widetilde{L}^1; \quad \widehat{J} = \widehat{R}^1\overline{R}^1 + \widehat{L}^1\overline{L}^1, \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} \widehat{J}R^1 &= \widehat{L}^1\overline{L}^1R^1 + \widehat{R}^1\overline{R}^1R^1 = \widehat{L}^1\overline{L}^1R^1 = \widehat{L}^1a_1\frac{1+\sigma_3}{2} = a_1\widehat{L}^1, \\ J\widehat{L}^1 &= R^1\widetilde{R}^1\widehat{L}^1 + L^1\widetilde{L}^1\widehat{L}^1 = R^1\widetilde{R}^1\widehat{L}^1 = R^1\widetilde{a}_1\frac{1+\sigma_3}{2} = \widetilde{a}_1R^1. \end{aligned} \quad (1.37)$$

On a donc :

$$\frac{a_1}{\rho}\widehat{L}^1 = \frac{\widehat{J}}{\rho}R^1 = \widehat{v}R^1; \quad \frac{\widetilde{a}_1}{\rho}R^1 = \frac{J}{\rho}\widehat{L}^1 = v\widehat{L}^1. \quad (1.38)$$

Et on peut donc mettre le système (1.35), équivalent à l'équation (1.32), sous la forme :

$$\begin{aligned} i\widehat{\nabla}R^1 &= q\widehat{A}R^1 + m\widehat{v}R^1, \\ i\nabla\widehat{L}^1 &= qA\widehat{L}^1 + mv\widehat{L}^1, \end{aligned} \quad (1.39)$$

qui équivaut bien à (1.30). Le décroisement de l'équation d'onde du monopôle magnétique de Lochak (équations (3.7)-(3.8) de [31]) fonctionne de la même manière.

2 Equations du second ordre et champs de jauge

La croyance dans le fait que l'équation de Dirac donne l'équation de Klein-Gordon au second ordre est tout à fait infondée. On a en effet, à partir de l'équation de Dirac, et quand on ne supprime pas le terme d'interaction électrique :

$$\begin{aligned}\nabla\eta &= -iqA\eta - im\xi ; \quad \widehat{\nabla}\xi = -iq\widehat{A}\xi - im\eta, \\ \square\eta &= \widehat{\nabla}(\nabla\eta) = -iq\widehat{\nabla}(A\eta) - im\widehat{\nabla}\xi, \\ \square\xi &= \nabla(\widehat{\nabla}\xi) = -iq\nabla(\widehat{A}\xi) - im\nabla\eta.\end{aligned}\tag{2.1}$$

En algèbre d'espace, le champ électromagnétique $\vec{E} + i\vec{H}$ vérifie :

$$\vec{E} + i\vec{H} = \nabla\widehat{A} ; \quad \widehat{\nabla}A = -\vec{E} + i\vec{H} ; \quad \partial^\mu A_\mu = 0.\tag{2.2}$$

Et on a :

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}(A\eta) &= (\widehat{\nabla}A)\eta + 2A^\mu\partial_\mu\eta - \widehat{A}\nabla\eta, \\ \nabla(\widehat{A}\xi) &= (\nabla\widehat{A})\xi + 2A^\mu\partial_\mu\xi - A\widehat{\nabla}\xi.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Les équations du second ordre se simplifient donc, il n'y a pas de terme en mq , et il reste :

$$\begin{aligned}(\square + m^2 - q^2\widehat{A}A)\eta &= -iq\widehat{F}\eta ; \quad \widehat{F} = \widehat{\nabla}A + 2A^\mu\partial_\mu, \\ (\square + m^2 - q^2A\widehat{A})\xi &= -iqF\xi ; \quad F = \nabla\widehat{A} + 2A^\mu\partial_\mu.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Certes si on supprime totalement l'interaction électromagnétique on obtient ce qu'on veut, $0 = (\square + m^2)\psi$. Mais un électron sans spin et sans charge, ça n'existe pas. On remarquera donc que l'équation du second ordre contient non seulement le champ électromagnétique F , mais aussi le potentiel électromagnétique A . On remarquera aussi que le terme de gauche de (2.4) contient certes un terme positif, m^2 , mais aussi un terme négatif car $A\widehat{A} = \widehat{A}A$ est le carré de la norme de A , qui est un vecteur du genre espace par suite de (1.30). Or ce terme négatif n'est pas fixe et il peut être localement beaucoup plus grand que le terme de masse. On remarquera enfin que si l'onde droite se couple à F , l'onde gauche se couple à \widehat{F} . La théorie quantique des champs, qui supprime la moitié des paramètres de l'onde de l'électron, est donc très loin de la réalité physique dans le cas de l'électron. Par contre pour le champ électromagnétique

elle est plus proche de la réalité physique que l'électromagnétisme classique, parce que le champ F de (2.4) est un champ d'opérateurs. Les précédentes remarques vont nous être utiles pour comprendre les conséquences de la récursivité des équations d'onde. Au second ordre on a :

$$\begin{aligned}
R^1 &= \frac{v}{m}(i\widehat{\nabla} - 2\widehat{b})\left[\frac{v}{m}(i\widehat{\nabla} - 2\widehat{b})R^1\right], \\
\widetilde{R}^8 &= \frac{v}{m}\left(i\widehat{\nabla} + \frac{1+2k}{2}\widehat{b}\right)\left[\frac{v}{m}\left(i\widehat{\nabla} + \frac{1+2k}{2}\widehat{b}\right)\widetilde{R}^8\right], \\
\begin{pmatrix} \widehat{L}^1 \\ \widetilde{L}^8 \end{pmatrix} &= \frac{\widehat{v}}{m} \begin{pmatrix} i\nabla - b - w^3 & w^1 + iw^2 \\ w^1 - iw^2 & i\nabla - b + w^3 \end{pmatrix} \\
&\quad \left[\frac{\widehat{v}}{m} \begin{pmatrix} i\nabla - b - w^3 & w^1 + iw^2 \\ w^1 - iw^2 & i\nabla - b + w^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{L}^1 \\ \widetilde{L}^8 \end{pmatrix}\right]
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Comme on a des égalités similaires à (2.3) pour b et v , le développement des équations, pour les ondes droites, oblige à considérer deux champs similaires au champ électromagnétique :

$$F_m = m(\nabla\widehat{v} + 2v^\mu\partial_\mu) ; \quad F_b = \nabla\widehat{b} + 2b^\mu\partial_\mu. \tag{2.6}$$

On a :

$$\begin{aligned}
F_m(vX) &= m(\nabla\widehat{v} + 2v^\mu\partial_\mu)(vX) \\
&= m[(\nabla\widehat{v})vX + 2v^\mu(\partial_\mu v)X + 2v^\mu v\partial_\mu X]
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
v\widehat{F}_m(X) &= mv(\widehat{\nabla}v + 2v^\mu\partial_\mu)X \\
&= mv(\widehat{\nabla}v)X + F_m(vX) - m(\nabla\widehat{v})vX - 2mv^\mu(\partial_\mu v)X \\
&= F_m(vX) - m[(\nabla\widehat{v})v + 2v^\mu\partial_\mu v - v\widehat{\nabla}v]X \\
&= F_m(vX) - m\nabla(\widehat{v}v)X.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

On a donc

$$F_m(vX) = v\widehat{F}_m X. \tag{2.9}$$

On obtient pour l'onde droite de l'électron :

$$\begin{aligned}
m^2 R^1 &= iv\widehat{\nabla}[v(i\widehat{\nabla} - 2\widehat{b})R^1] - 2mv\widehat{b}R^1, \\
0 &= [\square - (2b + mv)(2\widehat{b} + m\widehat{v}) + i(F_m + 2F_b)]R^1.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Le terme de jauge et le terme de masse de chaque équation d'onde ont un comportement différent sous les dilatations de Lorentz. Cela se traduit par l'introduction dans les équations du second ordre, en plus des « champs de jauge », d'un « champ matériel », le F_m défini en (2.6). L'autre nouveauté est le changement de signe du terme de masse, qui apparaît quand on tient complètement compte du caractère non linéaire du terme de masse. Ce changement de signe fait que tous les termes, ceux venant des potentiels comme ceux venant de la masse, sont de même signe, et ce signe correspond à la prédiction faite par de Broglie dès 1924 : si la particule-électron voyage à une vitesse toujours inférieure à la vitesse de la lumière, la propagation de la phase de l'onde se fait à une vitesse toujours supérieure à celle de la lumière. La dynamique de l'électron, qui s'obtient à partir du tenseur d'impulsion-énergie, est celle d'un fluide chargé se déplaçant suivant la loi de Lorentz (voir B.2 de [17]), donc avec une vitesse toujours inférieure à la vitesse de la lumière. Néanmoins l'équation du second ordre, lorsque l'on tient compte des variations de v , comporte un $-m^2$ parce que ces variations de v ajoutent $-2m^2$.

Pour l'onde droite du monopôle magnétique, le seul changement par rapport à l'onde droite de l'électron est le remplacement de $-2b$ par $(1/2 + k)b$, on obtient donc :

$$0 = [\square - (mv - \frac{1+2k}{2}b)(m\hat{v} - \frac{1+2k}{2}\hat{b}) + i(F_m - \frac{1+2k}{2}F_b)]\tilde{R}^s. \quad (2.11)$$

Les équations du second ordre pour les ondes gauches comportent de nombreux termes, et se simplifient si on utilise les définitions suivantes des champs de jauge :

$$\begin{aligned} \hat{F}_w^1 &= \hat{\nabla} w^1 + 2w^{1\mu}\partial_\mu + \hat{w}^2 w^3 - \hat{w}^3 w^2, \\ \hat{F}_w^2 &= \hat{\nabla} w^2 + 2w^{2\mu}\partial_\mu + \hat{w}^3 w^1 - \hat{w}^1 w^3, \\ \hat{F}_w^3 &= \hat{\nabla} w^3 + 2w^{3\mu}\partial_\mu + \hat{w}^1 w^2 - \hat{w}^2 w^1. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Les utilisateurs des groupes de jauge non commutatifs retrouvent ici les formules maintenant bien connues de type Yang-Mills. Simplement on n'y a pas oublié les dérivées partielles. Celles-ci impliquent que les champs sont des champs d'opérateurs agissant sur l'onde de spin 1/2.

On obtient :

$$m^2 \widehat{L}^1 = \begin{pmatrix} \square - (b \cdot b + w^1 \cdot w^1 + w^2 \cdot w^2 + w^3 \cdot w^3) \\ -2(b \cdot w^3 + b \cdot mv + w^3 \cdot mv) \\ +i(\widehat{F}_m + \widehat{F}_b + \widehat{F}_w^3) \end{pmatrix} \widehat{L}^1 \\ + \begin{pmatrix} 2(b + mv) \cdot (w^1 + iw^2) \\ -i(\widehat{F}_w^1 + i\widehat{F}_w^2) \end{pmatrix} \overline{L}^8. \quad (2.13)$$

$$m^2 \overline{L}^8 = \begin{pmatrix} \square - (b \cdot b + w^1 \cdot w^1 + w^2 \cdot w^2 + w^3 \cdot w^3) \\ +2(b \cdot w^3 - b \cdot mv + w^3 \cdot mv) \\ +i(\widehat{F}_m + \widehat{F}_b - \widehat{F}_w^3) \end{pmatrix} \overline{L}^8 \\ + \begin{pmatrix} 2(b + mv) \cdot (w^1 - iw^2) \\ -i(\widehat{F}_w^1 - i\widehat{F}_w^2) \end{pmatrix} \widehat{L}^1. \quad (2.14)$$

Ces équations du second ordre généralisent donc l'équation du second ordre (2.4) qui résulte de l'équation linéaire de Dirac. La principale différence vient du terme de masse, qui est changé de signe. L'origine de ce changement est le fait que le vecteur v est en facteur du terme de masse, et qu'il ajoute un changement de signe quand on le dérive. Du point de vue physique, cela correspond au fait que l'onde de de Broglie se propage à une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière [1]. Les champs de jauge sont aussi la généralisation du champ électromagnétique obtenu par de Broglie. Les champs de jauge sont, conformément à ce que dit la théorie quantique des champs, des champs d'opérateurs. En outre ils ne sont pas indépendants de ce sur quoi ils agissent, ils ne sont que des manières commodes de simplifier les équations d'onde du second ordre. Nous allons voir maintenant qu'il en est de même pour les quarks.

3 Equations du second ordre et champs de jauge, cas des quarks

Comme dans le cas des leptons, les ondes droites sont plus simples que les ondes gauches, qui sont seules sensibles au groupe de jauge $SU(2)$. Pour le quark d , dont les ondes droites de « couleur » r, g, b sont notées

respectivement R^2 , R^3 , R^4 [39], les équations d'onde vérifient :

$$\begin{aligned} i\widehat{\nabla}R^2 &= \frac{2}{3}\widehat{b}R^2 + (\widehat{h}_1^1 + i\widehat{h}_1^2)R^3 + (\widehat{h}_3^1 - i\widehat{h}_3^2)R^4 + (\widehat{h}_1^3 - \widehat{h}_3^3)R^2 + m_q\widehat{v}R^2, \\ i\widehat{\nabla}R^3 &= \frac{2}{3}\widehat{b}R^3 + (\widehat{h}_2^1 + i\widehat{h}_2^2)R^4 + (\widehat{h}_1^1 - i\widehat{h}_1^2)R^2 + (\widehat{h}_2^3 - \widehat{h}_1^3)R^3 + m_q\widehat{v}R^3, \\ i\widehat{\nabla}R^4 &= \frac{2}{3}\widehat{b}R^4 + (\widehat{h}_3^1 + i\widehat{h}_3^2)R^2 + (\widehat{h}_2^1 - i\widehat{h}_2^2)R^3 + (\widehat{h}_3^3 - \widehat{h}_2^3)R^4 + m_q\widehat{v}R^4, \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dans ces équations la masse réduite m_q peut être différente du m de l'onde leptonique. Le courant conservatif J_q , qui est le courant de probabilité dans le cas des quarks, vérifie :

$$J_q = \sum_{k=2}^7 D_R^k + D_L^k. \quad (3.2)$$

Comme pour l'onde leptonique on a :

$$\begin{aligned} \rho &= \|J_q\|; \\ \mathbf{v} &= \frac{J_q}{\rho}; \quad \|\mathbf{v}\| = 1; \quad \widehat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}^{-1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Les potentiels agissant en (3.1) sur les ondes droites du quark d sont constitués de ces seules ondes droites :

$$\begin{aligned} h_1^1 &= \frac{g_3}{2}D_R^{32} = \frac{g_3}{2}(R^2\widetilde{R}^3 + R^3\widetilde{R}^2); \quad h_1^2 = \frac{g_3}{2}d_R^{32} = \frac{g_3}{2}(-iR^2\widetilde{R}^3 + iR^3\widetilde{R}^2), \\ h_1^3 &= \frac{g_3}{2}(-D_R^2 + D_R^3); \quad h_2^1 = \frac{g_3}{2}D_R^{43} = \frac{g_3}{2}(R^3\widetilde{R}^4 + R^4\widetilde{R}^3), \\ h_2^2 &= \frac{g_3}{2}d_R^{43} = \frac{g_3}{2}(-iR^3\widetilde{R}^4 + iR^4\widetilde{R}^3); \quad h_2^3 = \frac{g_3}{2}(-D_R^3 + D_R^4), \\ h_3^1 &= \frac{g_3}{2}D_R^{24} = \frac{g_3}{2}(R^4\widetilde{R}^2 + R^2\widetilde{R}^4); \quad h_3^2 = \frac{g_3}{2}d_R^{24} = \frac{g_3}{2}(-iR^4\widetilde{R}^2 + iR^2\widetilde{R}^4), \\ h_3^3 &= \frac{g_3}{2}(-D_R^4 + D_R^2). \end{aligned} \quad (3.4)$$

les équations d'onde (3.1) peuvent s'écrire :

$$R_d = M_R^d R_d; \quad R_d = \begin{pmatrix} R^2 \\ R^3 \\ R^4 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

où l'opérateur M_R^d vérifie :

$$M_R^d = \frac{v}{m_q} (i\widehat{\nabla} - \frac{2}{3}\widehat{b} + \widehat{N}_R^d);$$

$$N_R^d = \begin{pmatrix} h_3^3 - h_1^3 & -h_1^1 + ih_1^2 & -h_3^1 - ih_3^2 \\ -h_1^1 - ih_1^2 & h_1^3 - h_2^3 & -h_2^1 + ih_2^2 \\ -h_3^1 + ih_3^2 & -h_2^1 - ih_2^2 & h_2^3 - h_3^3 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

On peut donc écrire la forme récursive (3.5) de l'équation d'onde :

$$R_d = \frac{v}{m_q} (i\widehat{\nabla} - \frac{2}{3}\widehat{b} + \widehat{N}_R^d) R_d \quad (3.7)$$

On obtient alors au second ordre :

$$R_d = \frac{v}{m_q} (i\widehat{\nabla} - \frac{2}{3}\widehat{b} + \widehat{N}_R^d) \left[\frac{v}{m_q} (i\widehat{\nabla} - \frac{2}{3}\widehat{b} + \widehat{N}_R^d) R_d \right],$$

$$m_q \widehat{v} R_d = i\widehat{\nabla} \left[\frac{v}{m_q} (i\widehat{\nabla} - \frac{2}{3}\widehat{b} + \widehat{N}_R^d) \right] + \left(-\frac{2}{3}\widehat{b} + \widehat{N}_R^d \right) R_d. \quad (3.8)$$

Comme en (2.6) on utilise :

$$F_q = m_q (\nabla \widehat{v} + 2v^\mu \partial_\mu); \quad F_q(vX) = v \widehat{F}_q X. \quad (3.9)$$

En multipliant (3.8) à gauche par $m_q v$ on obtient :

$$(m_q^2 + \frac{2m_q}{3} v \widehat{b} - m_q v \widehat{N}_R^d) R_d = i F_q R_d + \square R_d + \frac{2i}{3} \nabla (\widehat{b} R_d) - i \nabla (\widehat{N}_R^d R_d). \quad (3.10)$$

On a :

$$\nabla (\widehat{b} R_d) = (\nabla \widehat{b} + 2b^\mu \partial_\mu) R_d - \widehat{b} \widehat{\nabla} R_d \quad (3.11)$$

$$= F_b R_d + i m b \widehat{v} R_d + \frac{2i}{3} \widehat{b} \widehat{b} R_d - i b \widehat{N}_R^d R_d.$$

L'équation du second ordre ne se simplifie que si on pose pour les champs de jauge venant des potentiels h_j^k :

$$F_R^d = \nabla \widehat{N}_R^d + 2N_R^{d\mu} \partial_\mu - i N_R^d \widehat{N}_R^d. \quad (3.12)$$

Cette égalité correspond à la relation existant entre les potentiels et les champs en chromodynamique, mais avec deux corrections par rapport

à cette partie du modèle standard : d'une part on n'a pas oublié les dérivées partielles venant du spin 1/2, d'autre part le champ de jauge dépend de ce sur quoi il s'applique, c'est pourquoi nous utilisons une notation plus compliquée, F_R^d signifiant que ce champ d'opérateurs F s'applique aux parties droites des ondes de couleur du quark d . Ceci nous permet d'écrire l'équation du second ordre de manière un peu plus courte :

$$\begin{aligned} 0 = & [\square - m_q^2 - \frac{4}{9}\widehat{b}\widehat{b} - \frac{2}{3}m_q(\widehat{v}\widehat{b} + \widehat{b}\widehat{v})]R_d \\ & + m_q[\widehat{v}\widehat{N}_R^d(R_d) + N_R^d(\widehat{v}R_d)] + \frac{2}{3}[\widehat{b}\widehat{N}_R^d(R_d) + N_R^d(\widehat{b}R_d)] \quad (3.13) \\ & + i(F_q + \frac{2}{3}F_b - F_R^d)(R_d). \end{aligned}$$

Pour les ondes droites du quark u , avec les trois états de couleur r, g, b notés respectivement R^5, R^6, R^7 , nous avons comme équations d'onde, à la place de (3.1) (voir (1.35) de [39]) :

$$\begin{aligned} i\overline{\nabla}R^5 &= -\frac{4}{3}\widehat{b}R^5 + (\widehat{h}_1^1 + i\widehat{h}_1^2)R^6 + (\widehat{h}_3^1 - i\widehat{h}_3^2)R^7 + (\widehat{h}_1^3 - \widehat{h}_3^3)R^5 + m_q\widehat{v}R^5, \\ i\overline{\nabla}R^6 &= -\frac{4}{3}\widehat{b}R^6 + (\widehat{h}_2^1 + i\widehat{h}_2^2)R^7 + (\widehat{h}_1^1 - i\widehat{h}_1^2)R^5 + (\widehat{h}_2^3 - \widehat{h}_1^3)R^6 + m_q\widehat{v}R^6, \\ i\overline{\nabla}R^7 &= -\frac{4}{3}\widehat{b}R^7 + (\widehat{h}_3^1 + i\widehat{h}_3^2)R^5 + (\widehat{h}_2^1 - i\widehat{h}_2^2)R^6 + (\widehat{h}_3^3 - \widehat{h}_2^3)R^7 + m_q\widehat{v}R^7. \end{aligned} \quad (3.14)$$

où les h_j^k vérifient maintenant :

$$\begin{aligned} h_1^1 &= \frac{g_3}{2}D_R^{56} = \frac{g_3}{2}(R^5R^6 + R^6R^5); \quad h_1^2 = \frac{g_3}{2}d_R^{65} = \frac{g_3}{2}(-iR^5R^6 + iR^6R^5), \\ h_1^3 &= \frac{g_3}{2}(-D_R^5 + D_R^6); \quad h_2^1 = \frac{g_3}{2}D_R^{67} = \frac{g_3}{2}(R^6R^7 + R^7R^6), \\ h_2^2 &= \frac{g_3}{2}d_R^{76} = \frac{g_3}{2}(-iR^6R^7 + iR^7R^6); \quad h_2^3 = \frac{g_3}{2}(-D_R^6 + D_R^7), \\ h_3^1 &= \frac{g_3}{2}D_R^{75} = \frac{g_3}{2}(R^7R^5 + R^5R^7); \quad h_3^2 = \frac{g_3}{2}d_R^{57} = \frac{g_3}{2}(-iR^7R^5 + iR^5R^7) \\ h_3^3 &= \frac{g_3}{2}(-D_R^7 + D_R^5). \end{aligned} \quad (3.15)$$

les équations d'onde (3.14) peuvent s'écrire sous la forme récursive :

$$R_u = M_R^u R_u; \quad R_u = \begin{pmatrix} \tilde{R}^5 \\ \tilde{R}^6 \\ \tilde{R}^7 \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

où l'opérateur M_R^u vérifie :

$$M_R^u = \frac{v}{m_q} (i\hat{\nabla} + \frac{4}{3}\hat{b} + \hat{N}_R^u);$$

$$N_R^u = \begin{pmatrix} h_3^3 - h_1^3 & -h_1^1 + ih_1^2 & -h_3^1 - ih_3^2 \\ -h_1^1 - ih_1^2 & h_1^3 - h_2^3 & -h_2^1 + ih_2^2 \\ -h_3^1 + ih_3^2 & -h_2^1 - ih_2^2 & h_2^3 - h_3^3 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

On a réécrit la matrice, car même si elle a les mêmes propriétés qu'en (3.6), son contenu diffère, les h_j^k étant maintenant ceux de (3.15). On peut donc écrire la forme récursive (3.16) de l'équation d'onde :

$$R_u = \frac{v}{m_q} (i\hat{\nabla} + \frac{4}{3}\hat{b} + \hat{N}_R^u) R_u \quad (3.18)$$

Seul change le coefficient de b. On obtient alors au second ordre :

$$0 = [\square - m_q^2 - \frac{16}{9}b\hat{b} + \frac{4}{3}m_q(v\hat{b} + b\hat{v})] R_u$$

$$+ m_q [v\hat{N}_R^u(R_u) + N_R^u(\hat{v}R_u)] - \frac{4}{3} [b\hat{N}_R^u(R_u) + N_R^u(\hat{b}R_u)] \quad (3.19)$$

$$+ i(F_q - \frac{4}{3}F_b - F_R^u)(R_u).$$

Nous terminons cette présentation des équations du second ordre par le cas plus compliqué des ondes gauches des quarks, sur lesquelles agissent à la fois les opérateurs du groupe de jauge $SU(2)$ des interactions faibles et ceux du groupe $SU(3)$ de la chromodynamique. Les potentiels de la jauge électro-faible vérifient :

$$w_2^1 = qD_L^{25} = q(L^2L^5 + \tilde{L}^5\tilde{L}^2); \quad w_2^2 = qd_L^{25} = q(iL^2L^5 - i\tilde{L}^5\tilde{L}^2);$$

$$w_2^3 = q(-D_L^2 + D_L^5); \quad w_3^1 = qD_L^{36} = q(L^3L^6 + \tilde{L}^6\tilde{L}^3);$$

$$w_3^2 = qd_L^{36} = q(iL^3L^6 - i\tilde{L}^6\tilde{L}^3); \quad w_3^3 = q(-D_L^3 + D_L^6) \quad (3.20)$$

$$w_4^1 = qD_L^{47} = q(L^4L^7 + \tilde{L}^7\tilde{L}^4); \quad w_4^2 = qd_L^{47} = q(iL^4L^7 - i\tilde{L}^7\tilde{L}^4);$$

$$w_4^3 = q(-D_L^4 + D_L^7).$$

Les équations d'onde ont la forme obtenue en (1.36)–(1.37) de [39] :

$$\begin{aligned}
-i\nabla\widehat{L}^2 &= \frac{b}{3}\widehat{L}^2 + (w_2^1 + iw_2^2)\overline{L}^5 - w_2^3\widehat{L}^2 \\
&\quad + (h_1^1 + ih_1^2)\widehat{L}^3 + (h_3^1 - ih_3^2)\widehat{L}^4 + (h_1^3 - h_3^3)\widehat{L}^2 - m_q v \widehat{L}^2, \\
-i\widetilde{\nabla}\overline{L}^5 &= \frac{b}{3}\overline{L}^5 + (w_2^1 - iw_2^2)\widehat{L}^2 + w_2^3\overline{L}^5 \\
&\quad + (h_1^1 + ih_1^2)\overline{L}^6 + (h_3^1 - ih_3^2)\overline{L}^7 + (h_1^3 - h_3^3)\overline{L}^5 - m_q v \overline{L}^5,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
-i\nabla\widehat{L}^3 &= \frac{b}{3}\widehat{L}^3 + (w_3^1 + iw_3^2)\overline{L}^6 - w_3^3\widehat{L}^3 \\
&\quad + (h_2^1 + ih_2^2)\widehat{L}^4 + (h_1^1 - ih_1^2)\widehat{L}^2 + (h_2^3 - h_1^3)\widehat{L}^3 - m_q v \widehat{L}^3, \\
-i\widetilde{\nabla}\overline{L}^6 &= \frac{b}{3}\overline{L}^6 + (w_3^1 - iw_3^2)\widehat{L}^3 + w_3^3\overline{L}^6 \\
&\quad + (h_2^1 + ih_2^2)\overline{L}^7 + (h_1^1 - ih_1^2)\overline{L}^5 + (h_2^3 - h_1^3)\overline{L}^6 - m_q v \overline{L}^6,
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
-i\nabla\widehat{L}^4 &= \frac{b}{3}\widehat{L}^4 + (w_4^1 + iw_4^2)\overline{L}^7 - w_4^3\widehat{L}^4 \\
&\quad + (h_3^1 + ih_3^2)\widehat{L}^2 + (h_2^1 - ih_2^2)\widehat{L}^3 + (h_3^3 - h_2^3)\widehat{L}^4 - m_q v \widehat{L}^4, \\
-i\widetilde{\nabla}\overline{L}^7 &= \frac{b}{3}\overline{L}^7 + (w_4^1 - iw_4^2)\widehat{L}^4 + w_4^3\overline{L}^7 \\
&\quad + (h_3^1 + ih_3^2)\overline{L}^5 + (h_2^1 - ih_2^2)\overline{L}^6 + (h_3^3 - h_2^3)\overline{L}^7 - m_q v \overline{L}^7,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

La forme récursive des équations d'onde est :

$$\widehat{L} = \frac{\widehat{v}}{m_q}(i\nabla + \frac{b}{3} + M_L)\widehat{L}; \quad M_L = \begin{pmatrix} M_1 M_2 \\ M_3 M_4 \end{pmatrix}; \quad \widehat{L} = \begin{pmatrix} \widehat{L}_d \\ \overline{L}_u \end{pmatrix}, \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
M_1 &= \begin{pmatrix} -w_2^3 + h_1^3 - h_3^3 & h_1^1 + ih_1^2 & h_3^1 - ih_3^2 \\ h_1^1 - ih_1^2 & -w_3^3 + h_2^3 - h_1^3 & h_2^1 + ih_2^2 \\ h_3^1 + ih_3^2 & h_2^1 - ih_2^2 & -w_4^3 + h_3^3 - h_2^3 \end{pmatrix}; \widehat{L}_d = \begin{pmatrix} \widehat{L}^2 \\ \widehat{L}^3 \\ \widehat{L}^4 \end{pmatrix}, \\
M_2 &= \begin{pmatrix} w_2^1 + iw_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & w_3^1 + iw_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & w_4^1 + iw_4^2 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} w_2^1 - iw_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & w_3^1 - iw_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & w_4^1 - iw_4^2 \end{pmatrix}, \\
M_4 &= \begin{pmatrix} w_2^3 + h_1^3 - h_3^3 & h_1^1 + ih_1^2 & h_3^1 - ih_3^2 \\ h_1^1 - ih_1^2 & w_3^3 + h_2^3 - h_1^3 & h_2^1 + ih_2^2 \\ h_3^1 + ih_3^2 & h_2^1 - ih_2^2 & w_4^3 + h_3^3 - h_2^3 \end{pmatrix}; \overline{L}_u = \begin{pmatrix} \overline{L}^5 \\ \overline{L}^6 \\ \overline{L}^7 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{3.25}$$

où l'on a :

$$\begin{aligned}
h_1^1 &= \frac{g_3}{2} D_L^{23} = \frac{g_3}{2} (L^2 \widetilde{L}^3 + L^3 \widetilde{L}^2); \quad h_1^2 = \frac{g_3}{2} d_L^{32} = \frac{g_3}{2} (-iL^2 \widetilde{L}^3 + iL^3 \widetilde{L}^2), \\
h_1^3 &= \frac{g_3}{2} (-D_L^2 + D_L^3); \quad h_2^1 = \frac{g_3}{2} D_L^{34} = \frac{g_3}{2} (L^3 \widetilde{L}^4 + L^4 \widetilde{L}^3); \tag{3.26} \\
h_2^2 &= \frac{g_3}{2} d_L^{43} = \frac{g_3}{2} (-iL^3 \widetilde{L}^4 + iL^4 \widetilde{L}^3); \quad h_2^3 = \frac{g_3}{2} (-D_L^3 + D_L^4), \\
h_3^1 &= \frac{g_3}{2} D_L^{42} = \frac{g_3}{2} (L^4 \widetilde{L}^2 + L^2 \widetilde{L}^4); \quad h_3^2 = \frac{g_3}{2} d_L^{24} = \frac{g_3}{2} (-iL^4 \widetilde{L}^2 + iL^2 \widetilde{L}^4), \\
h_3^3 &= \frac{g_3}{2} (-D_L^4 + D_L^2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_1^1 &= \frac{g_3}{2} D_L^{56} = \frac{g_3}{2} (\widetilde{L}^5 L^6 + \widetilde{L}^6 L^5); \quad h_1^2 = \frac{g_3}{2} d_L^{65} = \frac{g_3}{2} (i\widetilde{L}^6 L^5 - i\widetilde{L}^5 L^6), \\
h_1^3 &= \frac{g_3}{2} (-D_L^5 + D_L^6); \quad h_2^1 = \frac{g_3}{2} D_L^{67} = \frac{g_3}{2} (\widetilde{L}^6 L^7 + \widetilde{L}^7 L^6), \tag{3.27} \\
h_2^2 &= \frac{g_3}{2} d_L^{76} = \frac{g_3}{2} (i\widetilde{L}^7 L^6 - i\widetilde{L}^6 L^7); \quad h_2^3 = \frac{g_3}{2} (-D_L^6 + D_L^7), \\
h_3^1 &= \frac{g_3}{2} D_L^{75} = \frac{g_3}{2} (\widetilde{L}^7 L^5 + \widetilde{L}^5 L^7); \quad h_3^2 = \frac{g_3}{2} d_L^{57} = \frac{g_3}{2} (i\widetilde{L}^5 L^7 - i\widetilde{L}^7 L^5), \\
h_3^3 &= \frac{g_3}{2} (-D_L^7 + D_L^5).
\end{aligned}$$

En posant :

$$\widehat{F}_L = \widehat{\nabla} M_L + 2M_L^\mu \partial_\mu - i\widehat{M}_L M_L \tag{3.28}$$

On obtient comme équation du second ordre :

$$\begin{aligned}
0 = & [\square - m_q^2 - \frac{1}{9}\widehat{\mathbf{b}}\widehat{\mathbf{b}} + \frac{m_q}{3}(\widehat{\mathbf{b}}\widehat{\mathbf{v}} + \widehat{\mathbf{v}}\widehat{\mathbf{b}})]\widehat{L} \\
& + m_q[\widehat{\mathbf{v}}M_L(\widehat{L}) + \widehat{M}_L(\widehat{\mathbf{v}}\widehat{L})] + \frac{1}{3}[\widehat{\mathbf{b}}M_L(\widehat{L}) + \widehat{M}_L(\widehat{\mathbf{b}}\widehat{L})] \\
& + i(\widehat{F}_q - \frac{1}{3}\widehat{F}_b - \widehat{F}_L)(\widehat{L}).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

4 Au troisième ordre

Nous n'allons détailler que le cas de R^1 , même s'il n'y a pas de différence avec les autres ondes, sinon la longueur des calculs. Nous avons au troisième ordre :

$$\begin{aligned}
R^1 = & \frac{\mathbf{v}}{m}(i\widehat{\nabla} - 2\widehat{\mathbf{b}})\{\frac{\mathbf{v}}{m}(i\widehat{\nabla} - 2\widehat{\mathbf{b}})[\frac{\mathbf{v}}{m}(i\widehat{\nabla} - 2\widehat{\mathbf{b}})R^1]\}, \\
0 = & \widehat{\nabla}\{\square R^1 - [(2\mathbf{b} + m\mathbf{v}) \cdot (2\mathbf{b} + m\mathbf{v})R^1] + i(F_m + 2F_b)R^1\}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Ceci nous donne, pour les « courants » qui généralisent ceux de l'électromagnétisme de Maxwell :

$$\begin{aligned}
\widehat{\nabla}[(F_m + 2F_b)R^1] = & i\square\widehat{\nabla}R^1 - i\widehat{\nabla}[(2\mathbf{b} + m\mathbf{v}) \cdot (2\mathbf{b} + m\mathbf{v})]R^1 \\
& - (2\mathbf{b} + m\mathbf{v}) \cdot (2\mathbf{b} + m\mathbf{v})(2\widehat{\mathbf{b}} + m\widehat{\mathbf{v}})R^1.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Cette relation et les autres que l'on peut former à partir des équations itérées à l'ordre trois ne contiennent pas les dérivées des champs seuls, les $\widehat{\nabla}F$, mais les dérivées des champs appliqués aux spineurs, comme $\widehat{\nabla}[F_m(R^1)]$. Rappelons que le modèle standard a rajouté au lagrangien donnant l'équation de Dirac (sans terme de masse) pour les ondes des fermions un lagrangien donnant les liens entre champs de jauge et courants. Mais il y a des problèmes avec ces liens, problèmes qui sont reconnus par la théorie, problèmes liés au fait que la théorie quantique des champs est basée sur la linéarité des équations d'onde, tandis que toute théorie de type Yang-Mills, avec groupe non commutatif, utilise des relations entre potentiels et champs de jauge qui ne sont pas linéaires (comme nos relations (2.10) ci-dessus). Il n'est donc pas surprenant que les relations que nous obtenons soient fort différentes de celles du modèle standard. En particulier elles ne dissocient pas les champs de jauge des champs de spineurs qui les créent. Et il est impossible de les dissocier, à cause des dérivées partielles des potentiels qui sont ignorées dans les calculs du modèle standard.

L'équation (4.2) comporte un terme avec des dérivées d'ordre trois, qui correspondent du point de vue physique au fait qu'un électron rayonne dès qu'il accélère. L'accélération peut venir de la force de Laplace (variation du tenseur de Tétrode d'impulsion-énergie) ou de «forces d'inertie», auquel cas il faudra bien sûr faire intervenir les équations d'onde avec terme général \mathbf{D} de (1.12). Les équations du second ordre ou d'ordre supérieur sont automatiquement satisfaites par toute solution des équations du premier ordre. Ce sont donc ces solutions du premier ordre qu'il suffit de prendre en considération. Elles sont, comme les équations du champ gravitationnel, hautement non linéaires, non seulement à cause du terme de masse, mais aussi des termes de jauge, qui sont cubiques par rapport aux spineurs. Obtenir ces solutions est donc un formidable défi, en particulier l'existence éventuelle de solutions de type soliton est aujourd'hui une question totalement ouverte. Vu la puissance de calcul phénoménale de nos ordinateurs, ce défi devrait pouvoir être relevé dès maintenant par ceux qui voudront bien s'en saisir.

5 Remarques de conclusion

L'onde quantique fondamentale est celle des fermions, de spin 1/2. Pour la matière ordinaire, celle qui compose les atomes, huit objets sont essentiels, l'électron, le neutrino (qui est aussi le monopôle magnétique), et deux quarks avec chacun trois états de couleur. Mais ces objets sont doubles, composés d'une onde droite et d'une onde gauche, donc les objets fondamentaux sont au nombre de seize, qu'on peut disposer ainsi :

L^3	L^2	R^2	R^3
L^4	L^1	R^1	R^4
L^7	L^8	R^8	R^7
L^6	L^5	R^5	R^6

Figure 1 : Classement des ondes de « première génération ».

Le tableau présente deux symétries, donc quatre parties. Ces quatre parties viennent du groupe d'invariance généralisant l'invariance relativiste,

qui est le groupe Cl_3^* des éléments inversibles de l'algèbre de Clifford de l'espace. Il vient donc en fin de compte de la géométrie de notre univers. Ce groupe, qui est isomorphe à $GL(2, \mathbb{C})$ admet, comme tous les groupes $GL(n, \mathbb{C})$, quatre sortes de représentations, qui donnent les quatre types d'équations de (1.13). Chacune des deux symétries du tableau est une fausse symétrie : la symétrie entre ondes droites et ondes gauches est complètement brisée par le fait que le groupe de jauge $SU(2)$ n'agit que sur la partie gauche du tableau. La réversion, qui est la symétrie principale dans une algèbre de Clifford, est la symétrie entre le haut et le bas du tableau. Elle aussi est brisée par le fait que la jauge en i intervient à la fois dans le terme de dérivation covariante et dans la partie des potentiels de jauge. Ceci vient de ce que la dimension de l'espace est impaire, donc le produit $i = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ commute avec tous les éléments de l'algèbre.

Il existe un autre classement entre les différentes parties du tableau, qui sépare le centre blanc, correspondant aux quatre ondes leptoniques, de la partie extérieure colorée, qui comprend les 12 ondes de quarks. Il y a une égalité entre les coefficients des termes en b pour les ondes gauches, qui fait qu'on peut réunir en une seule équation d'onde les 6 ondes gauches colorées, et c'est ce qui permet d'obtenir un groupe de jauge $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$, qui n'est totalement actif que dans cette partie du tableau : le groupe $SU(2)$ n'agit que sur la partie gauche, le groupe $SU(3)$ n'agit pas sur les quatre spineurs au centre du tableau.

Toutes les équations peuvent être mises sous forme récursive. Les champs de jauge, qui ont été considérés par certains comme aussi importants que les fermions du tableau, ne sont que des raccourcis commodes pour le calcul des équations itérées plusieurs fois. A valeur bivectorielle comme le champ électromagnétique, ou à valeur scalaire comme le boson de Higgs, ils n'ont pas d'existence indépendante de celle des fermions fondamentaux sur lesquels ces champs agissent. Il ne peut pas y avoir de symétrie entre bosons et fermions.

Dans le lagrangien du modèle standard, seule la partie contenant les spineurs est nécessaire, et suffisante. La partie contenant les champs de jauge est arbitraire, les relations qui ont été supposées entre les potentiels de jauge présents dans les équations du premier ordre et les champs présents dans les équations du second ordre qui en découlent sont fausses, elles ignorent les dérivées partielles qui viennent du spin 1/2 des fermions. La partie contenant les spineurs est seule nécessaire, car liée par une double implication avec les équations d'onde : la partie réelle (au sens cliffordien du terme) donne la nullité de la densité lagrangienne

[38], la nullité de la densité lagrangienne donne les équations d'onde, par les équations de Lagrange. Celles-ci sont obtenues par une intégration par partie puis par l'annulation d'une des deux parties. Cette annulation est justifiée du point de vue physique dans le cas stationnaire. Elle ne l'est pas dans le cas d'une solution des équations se propageant indéfiniment sans atténuation, ce qui est le cas à la fois pour les photons de la lumière ou pour les ondes gravitationnelles. Utiliser les équations de Lagrange dans une théorie de champ revient à ne pas tenir compte de la propagation des ondes.

Comme c'est l'invariance sous les translations d'espace-temps de la densité lagrangienne qui fournit la conservation du tenseur d'impulsion-énergie, il n'existe d'énergie que liée aux spineurs, il n'y a pas d'énergie propre aux champs de jauge. Le raisonnement d'Einstein concernant l'égalité $E = mc^2$ n'a donc pas d'exception. On peut prévoir qu'il n'y aura pas d'exception au principe d'équivalence. On peut aussi en déduire que, s'il existe bien de la « matière noire », celle-ci est déjà forcément présente dans le tableau ci-dessus, donc seuls les monopôles magnétiques peuvent constituer cette matière.

Pour unifier complètement les quatre sortes d'interaction que nous connaissons, il n'est pas nécessaire de se préoccuper des bosons pour eux-mêmes, seuls les fermions sont fondamentaux. Lorsqu'on écrit les potentiels à l'aide des spineurs dont ils sont faits, les équations d'onde des spineurs ne contiennent plus que des spineurs. En conséquence la quantification des niveaux d'énergie intervient seulement pour les ondes stationnaires de l'électron, et seulement avec un potentiel central en $1/r$. Il n'y a pas de raison de quantifier les champs, donc pas non plus de raison de quantifier le champ de gravitation. Pour intégrer la gravitation aux trois autres interactions, il est nécessaire de tenir compte du fait que le tenseur d'énergie de l'onde fermionique n'est pas symétrique, et donc que la variété d'espace-temps a non seulement une courbure, mais aussi une torsion.

Références

- [1] Louis de Broglie. Recherches sur la théorie des quantas. réédition : *Ann. Fond. Louis de Broglie*, **17** (1), 1924.
- [2] Louis de Broglie. L'électron magnétique. *Hermann*, Paris, 1934.

- [3] G. Lochak. Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin $\frac{1}{2}$. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, **8** (4), 1983.
- [4] G. Lochak. Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin $\frac{1}{2}$ (partie 2). *Ann. Fond. Louis de Broglie*, **9** (1), 1984.
- [5] G. Lochak. Wave equation for a magnetic monopole. *Int. J. of Th. Phys.*, **24** :1019–1050, 1985.
- [6] S. Weinberg. A model of leptons. *Phys. Rev. Lett.*, **19** :1264–1266, 1967.
- [7] Hestenes, D. (1966, 1987, 1992, 2015). *Space-Time Algebra* (Gordon and Breach, New-York).
- [8] Hestenes, D. Observables, operators, and complex numbers in the Dirac theory, *Jour. of Math. Phys.* Vol. **16**, No. 3, March 1975, p. 556–572.
- [9] de Broglie, L. (1940). *La mécanique du photon, Une nouvelle théorie de la lumière : tome 1 La lumière dans le vide* (Hermann, Paris).
- [10] de Broglie, L. (1942). *tome 2 Les interactions entre les photons et la matière* (Hermann, Paris).
- [11] Lochak, G. (2004). Photons électriques et photons magnétiques dans la théorie du photon de Louis de Broglie, *Ann. Fond. Louis de Broglie* **29**, pp. 297–316.
- [12] Lochak, G. (2008). “Photons électriques” et “photons magnétiques” dans la théorie du photon de de Broglie, *Ann. Fond. Louis de Broglie* **33**, pp. 107–127.
- [13] Lochak, G. (2010). A theory of light with four different photons : electric and magnetic with spin 1 and spin 0. *Ann. Fond. Louis de Broglie* **35**, pp. 1–18.
- [14] Daviau, C. (1993). *Equation de Dirac non linéaire*, Ph.D. thesis, Université de Nantes.
- [15] Daviau, C. (1997). Sur l'équation de Dirac dans l'algèbre de Pauli, *Ann. Fond. L. de Broglie* **22**, 1, pp. 87–103.
- [16] Daviau, C. (1997). Solutions of the Dirac equation and of a nonlinear Dirac equation for the hydrogen atom, *AACA* **7**, (S), pp. 175–194.
- [17] Daviau, C. (2011). *L'espace-temps double*, JePublie, Pouillé-les-coteaux.
- [18] Louis de Broglie. *La théorie des particules de spin 1/2 (électrons de Dirac)* Gauthier-Villars, Paris, 1952.
- [19] Daviau, C. (1998). Sur les tenseurs de la théorie de Dirac en algèbre d'espace, *Ann. Fond. Louis de Broglie* **23**, 1.
- [20] Daviau, C. (2001). Vers une mécanique quantique sans nombre complexe. *Ann. Fond. L. de Broglie* **26**, special, pp. 149–171.
- [21] Daviau, C. (2005). Interprétation cinématique de l'onde de l'électron, *Ann. Fond. L. de Broglie* **30**, 3-4.
- [22] Daviau, C. (2012). Cl_3^* invariance of the Dirac equation and of electromagnetism, *AACA* **22**, 3, pp. 611–623.
- [23] Daviau, C. (2012). *Double Space-Time and more* (JePublie, Pouillé-les-coteaux).

- [24] Daviau, C. (2012). Nonlinear Dirac Equation, Magnetic Monopoles and Double Space-Time (CISP, Cambridge UK).
- [25] Daviau, C. (2013). Invariant quantum wave equations and double space-time, *Adv. in Imaging and Electron Physics* **179**, chapter 1, pp. 1–137.
- [26] Daviau, C. (2013). Gauge Group of the Standard Model in $Cl_{1,5}$ AACA, **27** (1), 279-290 DOI 10.1007/s00006-015-0566-5
- [27] C. Daviau et J. Bertrand. *Nouvelle approche du modèle standard de la physique quantique en algèbre de Clifford*. JePublie, Pouillé-les-coteaux, 2013
- [28] C. Daviau and J. Bertrand. New Insights in the Standard Model of Quantum Physics in Clifford Algebra. Je Publie, Pouillé-les-coteaux, 2014 et <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00907848>.
- [29] C. Daviau and J. Bertrand. Relativistic gauge invariant wave equation of the electron – neutrino. *JMP*, **5** :1001–1022, <http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2014.511102>, 2014.
- [30] C. Daviau and J. Bertrand. A wave equation including leptons and quarks for the standard model of quantum physics in Clifford algebra. *JMP*, **5** : 2149–2173, <http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2014.518210>, 2014.
- [31] C. Daviau and J. Bertrand. The Standard Model of Quantum Physics in Clifford Algebra. World Scientific Publishing, Singapore, 2015.
- [32] Daviau, C. and Bertrand, J. (2015). Geometry of the standard model of quantum physics, *JAMP* **3**, pp. 46–61. <http://dx.doi.org/10.4236/jamp.2015.31007>.
- [33] C. Daviau. Retour à l'onde de Louis de Broglie. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, **40** (1),p. 113–138, 2015.
- [34] C. Daviau et J. Bertrand. Charge des quarks, bosons de jauge et principe de Pauli. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, **40** (1),p. 181–209, 2015.
- [35] C. Daviau, J. Bertrand, Left Chiral Solutions for the Hydrogen Atom of the Wave Equation for Electron+Neutrino. *JMP*, **6**, 1647–1656. <http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2015.611166>
- [36] C. Daviau, J. Bertrand, L'onde leptonique générale : électron + monopôle magnétique *Ann. Fond. Louis de Broglie*, **41**, p. 73–97, 2016
- [37] Daviau, C and Bertrand, J. (2015) Electro-Weak Gauge, Weinberg-Salam Angle *JMP*, **6**, 2080-2092. <http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2015.614215>
- [38] Daviau, C., Bertrand, J. and Girardot, D. (2016) Towards the Unification of All Interactions (The First Part : The Spinor Wave). *JMP*, **7**, 1568-1590. <http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2016.712143>
- [39] Daviau, C., Bertrand, J. and Girardot, D. (2016) Towards the Unification, Part 2 : Simplified Equations, Covariant Derivative, Photons. *JMP*, **7**, 2398-2417. <http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2016.716207>
- [40] Socroun, T. (2015). Clifford to unify general relativity and electromagnetism, AACA **25**, DOI 10.1007/s00006-015-0558-5

(Manuscrit reçu le 6 mai 2017)